重調和ディリクレ問題に対するモンテカルロ法と平均化法(確率数値解析に於ける諸問題)

天野, 一男

数理解析研究所講究録
第 850 巻 1993 年 14-32

重調和ディリクレ問題に対するモンテカルロ法と平均化法

城西大学理学部　天 野 一 男 (Kazuo AMANO)*

アブストラクト. この研究ノートの目的は、重調和ディリクレ問題に対する２つの新しい数値解法と、それらから導出されるアルゴリズムを紹介することである。第一の数値解法は、モンテ・カルロ法である。著者の知る限り、われわれのモンテ・カルロ法は、これまでに知られている方法とはまったく異なるものである (*cf.* [4], [12], *etc*)。われわれは、普通の random walk とは少し違う *two step random walk* を用いて、重調和ディリクレ問題に対する **確率数値解** を構成する。第二の数値解法は、**平均化法**である。われわれの結果を用いれば、重調和ディリクレ問題の数値解法が、画像処理における極めて単純な平均化のアルゴリズムに帰着される。平均化法の場合、厳密な誤差評価も得られる。著者は、これらのアルゴリズムが、計算の単純さ・スピードなどの点で既存の方法よりも優ており、かつまた並列処理に大変適しているものと確信している。

1. 序

「偏微分方程式」と「モンテ・カルロ法」というキーワードで、データベースを検索すると、過去十年間だけでも、数百の論文が存在することがわかる。しかしながら、それらの論文のうちで、高階の偏微分方程式を扱ったものは、わずか数編にしかすぎない。研究者達は、1階と２階の偏微分方程式だけに、夢中になってしまっているように見受けられる。われわれは高階の偏微分方程式の中にも、重要な方程式がたくさんあることを、忘れてはならない。たとえば、重調和方程式 $\Delta^2 u = 0$ がそれである。重調和関数は、弾性理論の中で重要な役割を演じる。

はじめに、われわれは重調和ディリクレ問題

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \Delta^2 u = 0 & \text{in } D \\ u = \phi,\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \psi & \text{on } \partial D \end{cases}$$

に対する、新しいタイプの数値解、**確率数値解**、を構成する。ここで、D は２次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^2$ の領域で、滑らかな境界 ∂D をもつものとする。$\mathbf{n}$ は境界上の単位内向法ベクトルをあらわし、境界条件 ϕ と ψ は滑らかな関数とする。（滑らかでない境界や、境界条件に対しても、われわれの方法は有効であるが、簡単のために、この研究ノートでは「滑らか」と仮定する。）重調和ディリクレ問題に対するモンテ・カルロ法というテーマは、既に数名の研究者

* kamano@tansei.cc.u-tokyo.ac.jp

によって取り上げられている (*cf.* [4], [12], *etc*)。しかし、残念ながら、彼らは高階の問題である重調和ディリクレ問題を、低階の問題に帰着することによって、モンテ・カルロ法を適用しようとしている。結果として、彼らの定理から導き出されるアルゴリズムは、複雑でスピードの遅いものにならざるを得ない。われわれの目的は、重調和ディリクレ問題への新しい、ダイレクトなアプローチを提唱することである。われわれの定理（定理 3.1）は、モンテ・カルロ法の新しい可能性を示している。

つぎに、われわれは、重調和ディリクレ問題に対する、**平均化法** を確立する。モンテ・カルロ法の一つの欠陥は、厳密な誤差評価が得られないことである（もちろん、統計的な誤差評価は得られる）。しかし幸運なことに、われわれは、われわれのアイディアを確率論的にではなく、画像処理的に解釈することによって、もう一つの数値解とその厳密な誤差評価を得ることができる。われわれの定理（定理 4.1）によれば、重調和ディリクレ問題の数値解法は、単純な画像処理のアルゴリズム、**平均化法**、に帰着される。平均化法から導出されるアルゴリズムは、簡潔で非常に収束のスピードが速いことが、数値実験で確かめられる。

Section 2 で、われわれは、差分作用素に関する、基本補題を幾つか証明する。Sections 3, 4 のそれぞれで、確率論的な解釈と、画像処理的な解釈が与えられる。Section 5 では、簡単な数値実験を行う。

2. 差分作用素に関する補題

二つの差分作用素 Mf と Lf を、次の式で定義する。

$$Mf(x,y)=\frac{1}{4}\big(f(x+h,y+h)+f(x-h,y+h)+f(x-h,y-h)+f(x+h,y-h)\big)\,, \tag{2.1}$$

$$Lf(x,y)=\frac{1}{h^2}\big(Mf(x,y)-f(x,y)\big)\,. \tag{2.2}$$

ただし、$f(x,y)$ は実二変数関数とする。この研究ノートでは、h は十分に小さな正定数をあらわす, *i.e.*, $0<h\ll 1$.

補題 2.1. $\mathbf{R}^2$ で定義された、任意の C^2 級の有界関数 $f(x,y)$ に対して、

$$Mf(x,y)=f(x,y)+\frac{h^2}{2}\Delta f(x,y)+o(h^2) \tag{2.3}$$

がなりたつ。ここで Δ はラプラシアンとする, *i.e.*, $\Delta=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2$.

証明. テイラーの定理によれば、

$$\begin{aligned} f(x+\xi,y+\eta)&=f(x,y)+\xi\,f_x(x,y)+\eta\,f_y(x,y)\\ &+\frac{\xi^2}{2}\,f_{xx}(x,y)+\xi\eta\,f_{xy}(x,y)+\frac{\eta^2}{2}\,f_{yy}(x,y)+o(\xi^2,\eta^2)\end{aligned} \tag{2.4}$$

という等式が、任意の実数 ξ と η に対してなりたつ。(2.4) より

$$\begin{aligned}
&f(x+h,y+h)+f(x-h,y+h)+f(x-h,y-h)+f(x+h,y-h)\\
&=4f(x,y)+2h^2f_{xx}(x,y)+2h^2f_{yy}(x,y)+o(h^2)\\
&=4f(x,y)+2h^2\Delta f(x,y)+o(h^2)
\end{aligned}$$

が導き出される。したがって、(2.1) と (2.4) より (2.3) が得られる。▮

注意. (2.3) と (2.2) より、次の等式が従う。

$$Lf(x,y)=\frac{1}{2}\Delta f(x,y)+o(1). \tag{2.5}$$

$f(x,y)$ が C^3 級の場合には、われわれは上述の表現中の $o(h^2)$ と $o(1)$ を、それぞれ $O(h^3)$ と $O(h)$ に置き換えることができる。

補題 2.2. $\mathbf{R}^2$ で定義された、任意の重調和関数 $u(x,y)$ と自然数 $n=1,2,\cdots$ に対して、

$$u(x,y)=nM^{n-1}u(x,y)-(n-1)M^nu(x,y)+o(h^4)\sum_{\nu=0}^{n-1}\nu \tag{2.6}$$

が、$\mathbf{R}^2$ の任意に固定されたコンパクト集合上でなりたつ。

証明. $n=1$ の場合 (2.6) は自明である。もし (2.6) が $n=k$ に対してなりたつならば、(2.2) により、

$$\begin{aligned}
u&=kM^{k-1}u-(k-1)M^ku+o(h^4)\sum_{\nu=0}^{k-1}\nu\\
&=M^ku-kM^{k-1}(Mu-u)+o(h^4)\sum_{\nu=0}^{k-1}\nu\\
&=M^ku-kh^2M^{k-1}Lu+o(h^4)\sum_{\nu=0}^{k-1}\nu
\end{aligned} \tag{2.7}$$

もなりたつ。(2.2) は $u=Mu-h^2Lu,$ を意味するので、(2.7) は

$$\begin{aligned}
u&=M^k(Mu-h^2Lu)-kh^2M^{k-1}L(Mu-h^2Lu)+o(h^4)\sum_{\nu=0}^{k-1}\nu\\
&=M^{k+1}u-(k+1)h^2M^kLu+kh^4M^{k-1}L^2u+o(h^4)\sum_{\nu=0}^{k-1}\nu
\end{aligned} \tag{2.8}$$

を与える。一方、(2.5) は

$$L^2u=\left(\frac{1}{2}\Delta\right)^2u+o(1)=o(1) \tag{2.9}$$

を保証する。(2.8) と (2.9) より、われわれは

$$
(2.10)\qquad
\begin{aligned}
u &= M^{k+1}u-(k+1)h^2M^kLu+o(h^4)k+o(h^4)\sum_{\nu=0}^{k-1}\nu \\
&= M^{k+1}u-(k+1)h^2M^kLu+o(h^4)\sum_{\nu=0}^{k}\nu
\end{aligned}
$$

を得る。(2.2) と (2.10) より、

$$
(2.11)\qquad
\begin{aligned}
u &= M^{k+1}u-(k+1)h^2M^k\frac{1}{h^2}(Mu-u)+o(h^4)\sum_{\nu=0}^{k}\nu \\
&= (k+1)M^ku-kM^{k+1}u+o(h^4)\sum_{\nu=0}^{k}\nu
\end{aligned}
$$

が従う。よって、(2.6) が $n=k+1$ に対しても成り立つことが証明された。 ▮

注意 1. 補題 2.2 の証明をみれば明らかなように、(2.6) は $\mathbf{R}^2$ の領域 D で定義された重調和関数 $u(x,y)$ に対してもそのままなりたつ。ただし、$\sqrt{2}hn < dist\big((x,y),\partial D\big)$ という仮定が必要である。

注意 2. 補題 2.1 の注意によれば、われわれは $o(h^4)$ を $O(h^5)$ で置き換えることができる。というのは、重調和関数は C^∞ 級の関数だからである。

補題 2.3. $u(x,y)$ が $\mathbf{R}^2$ で定義された重調和関数ならば、任意の自然数 $n,k=1,2,\cdots$ に対して、

$$
(2.12)\qquad
\begin{aligned}
&(n+1)u(x,y)-nMu(x,y) \\
&= (n+k+1)M^ku(x,y)-(n+k)M^{k+1}u(x.y)+o(h^4)\sum_{\nu=n+1}^{n+k}\nu
\end{aligned}
$$

が、$\mathbf{R}^2$ の任意に固定されたコンパクト集合上でなりたつ。

証明. (2.2), (2.9) と直接計算により、

$$
(2.13)\qquad
\begin{aligned}
&(n+1)u-nMu \\
&= Mu-(n+1)(Mu-u) \\
&= Mu-(n+1)h^2Lu \\
&= M(Mu-h^2Lu)-(n+1)h^2L(Mu-h^2Lu) \\
&= M^2u-(n+2)h^2MLu+(n+1)h^4L^2u \\
&= M^2u-(n+2)h^2MLu+(n+1)o(h^4) \\
&= M^2u-(n+2)M(Mu-u)+(n+1)o(h^4) \\
&= (n+2)Mu-(n+1)M^2u+(n+1)o(h^4)\ ,
\end{aligned}
$$

i.e., $k=1$ のとき (2.12) はなりたつ。同様にして、

$$
\begin{aligned}
&(n+k+1)M^k u-(n+k)M^{k+1}u+o(h^4)\sum_{\nu=n+1}^{n+k}\nu\\
&=M^{k+1}u-(n+k+1)M^k(Mu-u)+o(h^4)\sum_{\nu=n+1}^{n+k}\nu\\
&=M^{k+1}u-(n+k+1)h^2M^kLu+o(h^4)\sum_{\nu=n+1}^{n+k}\nu\\
&=M^{k+1}(Mu-h^2Lu)-(n+k+1)h^2M^kL(Mu-h^2Lu)+o(h^4)\sum_{\nu=n+1}^{n+k}\nu\\
&=M^{k+2}u-(n+k+2)h^2M^{k+1}Lu+(n+k+1)h^4M^kL^2u+o(h^4)\sum_{\nu=n+1}^{n+k}\nu\\
&=M^{k+2}u-(n+k+2)h^2M^{k+1}Lu+(n+k+1)o(h^4)+o(h^4)\sum_{\nu=n+1}^{n+k}\nu\\
&=M^{k+2}u-(n+k+2)M^{k+1}(Mu-u)+o(h^4)\sum_{\nu=n+1}^{n+k+1}\nu\\
&=(n+k+2)M^{k+1}u-(n+k+1)M^{k+2}u+o(h^4)\sum_{\nu=n+1}^{n+k+1}\nu
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

よって、任意の k に対して、(2.12) がなりたつ。∎

注意. 補題 2.2 の 注意 1 における議論と同様に、$\sqrt{2}h(k+1)<dist\big((x,y),\partial D\big)$ ならば、$\mathbf{R}^2$ の領域 D で定義された重調和関数 $u(x,y)$ に対しても、(2.12) はそのままなりたつ。

3. 確率論的解釈

この節を通して、 $u=u(x,y)$ は (1.1) の古典的な意味での解とする。補題 2.2 とその注意により、$\sqrt{2}h(n+1)\le dist\big((x,y),\partial D\big)$ なる $(x,y)\in D$ と $n=1,2,\cdots$ に対して、等式

$$u(x,y)=(n+1)M^n u(x,y)-nM^{n+1}u(x,y)+O(h^5)\,\sigma(n) \tag{3.1}$$

が成り立つ。ただしここで、$\sigma(k)$ は $\sum_{\nu=0}^{k}\nu$ をあらわす。

まず第一に、われわれは (3.1) の確率表現を求める。$\{w_k : k=0,1,2,\cdots\}$ は、確率空間 $(\Omega,\mathcal{F}_k,P)$ 上の、2次元ランダムウォークとする, *i.e.*,

$$w_0=(x,y),\quad \begin{cases} P\big[w_{k+1}=w_k+(\pm h,\pm h)\big]=\dfrac{1}{4}\\[2mm] P\big[w_{k+1}=w_k+(\pm h,\mp h)\big]=\dfrac{1}{4}\,. \end{cases} \tag{3.2}$$

(2.1) より、次が得られる：

$$
\begin{aligned}
&Mu(x,y)\\
&=\frac{1}{4}\bigl(u(x+h,y+h)+u(x-h,y+h)+u(x-h,y-h)+u(x+h,y-h)\bigr)\\
&=\sum_{(\xi_1,\eta_1)\in\overline{D}} u(\xi_1,\eta_1)\,P[w_1=(\xi_1,\eta_1)]\\
&=E[u(w_1)]\ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&M^2u(x,y)\\
&=\frac{1}{4}\bigl(Mu(x+h,y+h)+Mu(x-h,y+h)+Mu(x-h,y-h)+Mu(x+h,y-h)\bigr)\\
&=\frac{1}{16}\bigl(2u(x+2h,y)+u(x+2h,y+2h)+2u(x,y+2h)+u(x-2h,y+2h)\\
&\qquad 2u(x-2h,y)+u(x-2h,y-2h)+2u(x,y-2h)+u(x+2h,y-2h)+4u(x,y)\bigr)\\
&=\sum_{(\xi_2,\eta_2)\in\overline{D}} u(\xi_2,\eta_2)\,P[w_2=(\xi_2,\eta_2)]\\
&=E[u(w_2)]\ .
\end{aligned}
$$

このようにして (2.1) を繰り返し用いることにより、

$$
M^k u(x,y)=\sum_{(\xi_k,\eta_k)\in\overline{D}} u(\xi_k,\eta_k)\,P[w_k=(\xi_k,\eta_k)]=E[u(w_k)] \tag{3.3}
$$

が従う。

よって、(3.1) は次のように書き替られる。

補題 3.1. $u(x,y)$ が *(1.1)* の解であるならば、$\sqrt{2}h(n+1)\le dist\bigl((x,y),\partial D\bigr)$ なる任意の $(x,y)\in D$ と $n=1,2,\cdots$ に対して、

$$
\begin{aligned}
u(x,y)&=(n+1)\sum_{(\xi_n,\eta_n)\in\overline{D}} u(\xi_n,\eta_n)\,P[w_n=(\xi_n,\eta_n)]\\
&\qquad -n\sum_{(\xi_{n+1},\eta_{n+1})\in\overline{D}} u(\xi_{n+1},\eta_{n+1})\,P[w_{n+1}=(\xi_{n+1},\eta_{n+1})]+O(h^5)\,\sigma(n)\\
&\qquad =(n+1)E[u(w_n)]-nE[u(w_{n+1})]+O(h^5)\,\sigma(n)
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

がなりたつ。

(3.1) は

$$
u(x,y)=M^n\bigl((n+1)-nM\bigr)u(x,y)+O(h^5)\,\sigma(n) \tag{3.5}
$$

というように書き換えられるので、(3.3) より、$\sqrt{2}h(n+1) \leq dist\big((x,y), \partial D\big)$ に対して、

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \sum_{(\xi_n,\eta_n)\in\overline{D}} \big((n+1)-nM\big)u(\xi_n,\eta_n)\,P[w_n=(\xi_n,\eta_n)] + O(h^5)\,\sigma(n) \\
&= \sum_{(\xi_n,\eta_n)\in\overline{D}} \Big\{\big((n+1)-nM\big)u(\xi_n,\eta_n) + O(h^5)\,\sigma(n)\Big\}P[w_n=(\xi_n,\eta_n)] \\
&= E\big[\big((n+1)-nM\big)u(w_n)\big] + O(h^5)\,\sigma(n)
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

と言う式がなりたつ。さらにわれわれは、(3.6) を一般化することができる。じっさい、もし $dist\big((\xi_n,\eta_n), \partial D\big) \geq 2\sqrt{2}h$ ならば、補題 2.3 と (3.3) により、

$$
\begin{aligned}
&\big((n+1)-nM\big)u(\xi_n,\eta_n) \\
&= M^k\big((n+k+1)-(n+k)M\big)u(\xi_n,\eta_n) \\
&+ O(h^5)\,\sigma(n+1,n+k) \\
&= \sum_{(\xi_{n+k},\eta_{n+k})\in\overline{D}} \Big\{\big((n+k+1)-(n+k)M\big)u(\xi_{n+k},\eta_{n+k}) \\
&+ O(h^5)\,\sigma(n+1,n+k)\Big\}P[w_{n+k}=(\xi_{n+k},\eta_{n+k})\,|\,w_n=(\xi_n,\eta_n)] \\
&= E\big[\big((n+k+1)-(n+k)M\big)u(w_{n+k})\,|\,w_n=(\xi_n,\eta_n)\big] \\
&+ O(h^5)\,\sigma(n+1,n+k)
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

という関係式が、$\sqrt{2}h(k+1) \leq dist\big((\xi_n,\eta_n), \partial D\big)$ なる任意の自然数 $k=1,2,\cdots$ に対してなりたつ。ここで、$P[A|B]$ は条件付き確率をあらわし、$\sigma(k,\ell)$ は $\sum_{\nu=k}^{\ell}\nu$ をあらわす。したがって、$\sqrt{2}h(k+1) \leq dist\big((\xi_n,\eta_n), \partial D\big)$ なる $(\xi_n,\eta_n)\in D$ と $k=1,2,\cdots$ に対して、

$$
\begin{aligned}
&\Big\{\big((n+1)-nM\big)u(\xi_n,\eta_n) + O(h^5)\,\sigma(n)\Big\}P[w_n=(\xi_n,\eta_n)] \\
&= \sum_{(\xi_{n+k},\eta_{n+k})\in\overline{D}} \Big\{\big((n+k+1)-(n+k)M\big)u(\xi_{n+k},\eta_{n+k}) \\
&+ O(h^5)\,\sigma(n+k)\Big\}P[w_{n+k}=(\xi_{n+k},\eta_{n+k})\,|\,w_n=(\xi_n,\eta_n)]\,P[w_n=(\xi_n,\eta_n)] \\
&= \Big\{E\big[\big((n+k+1)-(n+k)M\big)u(w_{n+k})\,|\,w_n=(\xi_n,\eta_n)\big] \\
&+ O(h^5)\,\sigma(n+k)\Big\}P[w_n=(\xi_n,\eta_n)]
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

がなりたつ。われわれは、上述のような変形を再帰的に行うことができる。そこで、$\big((\nu+1)-\nu M\big)u(\xi_\nu,\eta_\nu) + O(h^5)\sigma(\nu)$ に対して、ランダムウォーク $\{w_\nu\}$ が D の境界の $2\sqrt{2}h$- 近傍をヒットするまで, *i.e.*, $dist(w_\nu, \partial D) < 2\sqrt{2}h$ となるまで、再帰的な変形を繰り返す。結果として、われわれは (3.6) の一般形

$$
u(x,y) = E\big[\big((\tau+1)-\tau M\big)u(w_\tau)\big] + O(h^5)E[\sigma(\tau)] \tag{3.9}
$$

を得る。ここで、τ は 境界 ∂D の $2\sqrt{2}h$- 近傍への *first hitting time* をあらわす, *i.e.*, $\omega \in \Omega$ に対して、

$$\tau(\omega) = \begin{cases} \min\left\{k : dist\bigl(w_k(\omega), \partial D\bigr) < 2\sqrt{2}h\right\} & \\ \qquad\qquad\qquad \text{if } \left\{k : dist\bigl(w_k(\omega), \partial D\bigr) < 2\sqrt{2}h\right\} \neq \emptyset \\ \infty & \\ \qquad\qquad\qquad \text{if } \left\{k : dist\bigl(w_k(\omega), \partial D\bigr) < 2\sqrt{2}h\right\} = \emptyset\ . \end{cases}$$

ところで、

$$\begin{aligned} & E[\tau M u(w_\tau)] \\ & = E\left[\frac{\tau}{4}\Bigl(u\bigl(w_\tau + (h,h)\bigr) + u\bigl(w_\tau + (-h,h)\bigr) + u\bigl(w_\tau + (-h,-h)\bigr) + u\bigl(w_\tau + (h,-h)\bigr)\Bigr)\right] \\ & = E[\tau u(w_{\tau+1})] \end{aligned}$$

なので、(3.9) より次の補題を得る。

補題 3.2. *(1.1)* の解 $u(x,y)$ は、確率表現

$$u(x,y) = E[(\tau+1)u(w_\tau)] - E[\tau u(w_{\tau+1})] + O(h^5)E[\sigma(\tau)] \tag{3.10}$$

をもつ。

注意. 補題 3.2 において、

$$\sigma(\tau) = \frac{1}{2}\tau(\tau+1) \leq \tau^2$$

なので、われわれは $O(h^5)E[\sigma(\tau)]$ を $O(h^5)E[\tau^2]$ で置き換えることができる。

$d(z)$ [resp. $d(x,y)$] は、点 z [resp. (x,y)] から、境界 ∂D までの距離をあらわす, *i.e.*,

$$d(z) = \inf\left\{dist(z,\zeta) : \zeta \in \partial D\right\}$$

$$\left[\text{resp.} \quad d(x,y) = \inf\left\{dist\bigl((x,y),(\xi,\eta)\bigr) : (\xi,\eta) \in \partial D\right\}\right].$$

よく知られているように、任意の点 $z = (x,y) \in D$ に対して、

$$d(z) = dist\bigl(z, \wp(z)\bigr)$$

$$\left[\text{resp.} \quad d(x,y) = dist\bigl((x,y), \wp(x,y)\bigr)\right]$$

なる点 $\wp(z) = \wp(x,y) \in \partial D$ が存在する。(1.1) の境界条件とテイラーの定理により、$dist(z,\partial D) \ll 1$ なる任意の $z \in D$ に対して、

$$\begin{aligned} u(z) &= u\bigl(\wp(z)\bigr) + d(z)\Bigl(\frac{\partial u}{\partial n}\Bigr)\bigl(\wp(z)\bigr) + O\bigl(d^2(z)\bigr) \\ &= \phi\bigl(\wp(z)\bigr) + d(z)\psi\bigl(\wp(z)\bigr) + O\bigl(d^2(z)\bigr) \end{aligned} \tag{3.11}$$

がなりたつ。

(3.11) より、

$$
\begin{aligned}
&(\tau+1)u(w_\tau)-\tau u(w_{\tau+1})\\
&=(\tau+1)\Big\{\phi\big(\wp(w_\tau)\big)+d(w_\tau)\psi\big(\wp(w_\tau)\big)\Big\}+O\big(d^2(w_\tau)\big)(\tau+1)\\
&-\tau\Big\{\phi\big(\wp(w_{\tau+1})\big)+d(w_{\tau+1})\psi\big(\wp(w_{\tau+1})\big)\Big\}+O\big(d^2(w_{\tau+1})\big)\tau
\end{aligned}
$$

かつ

$$
d(w_\tau)<2\sqrt{2}h,\ d(w_{\tau+1})<3\sqrt{2}h
$$

なので、次の補題が得られる。

補題 3.3. *$u(x,y)$ が (1.1) の解であり、τ が境界 ∂D の $2\sqrt{2}h$- 近傍への first hitting time であれば、*

$$
\begin{aligned}
&(\tau+1)u(w_\tau)-\tau u(w_{\tau+1})\\
&=(\tau+1)\Big\{\phi\big(\wp(w_\tau)\big)+d(w_\tau)\psi\big(\wp(w_\tau)\big)\Big\}\\
&-\tau\Big\{\phi\big(\wp(w_{\tau+1})\big)+d(w_{\tau+1})\psi\big(\wp(w_{\tau+1})\big)\Big\}+O(h^2)\tau
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

がなりたつ。

補題 3.2, 3.3 を総合すると、重調和ディリクレ問題 (1.1) の *stochastic numerical solution* に関する定理を得る。

定理 3.1. *$u(x,y)$ が (1.1) の解であれば、*

$$
\begin{aligned}
u(x,y)=&E\Big[(\tau+1)\Big\{\phi\big(\wp(w_\tau)\big)+d(w_\tau)\psi\big(\wp(w_\tau)\big)\Big\}\Big]\\
&-E\Big[\tau\Big\{\phi\big(\wp(w_{\tau+1})\big)+d(w_{\tau+1})\psi\big(\wp(w_{\tau+1})\big)\Big\}\Big]\\
&+O(h^2)E[\tau]+O(h^5)E[\tau^2]
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

がなりたつ。

注意. (3.13) を適当に離散化すれば、*stochastic numerical solution* が得られる。じっさい、まず初めに疑似乱数を発生させて、Ω の標本点の random sequence $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ をつくる。簡単のために、

$$
\begin{aligned}
\tau_k&=\tau(\omega_k),\\
p_k&=\wp\big(w_{\tau(\omega_k)}(\omega_k)\big),\\
q_k&=\wp\big(w_{\tau(\omega_k)+1}(\omega_k)\big),\\
\varepsilon_k&=d\big(w_{\tau(\omega_k)}(\omega_k)\big),\\
\delta_k&=d\big(w_{\tau(\omega_k)+1}(\omega_k)\big)
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

とおく。次に、(3.14) を (3.13) に代入して、

$$
(3.15)\qquad
\begin{aligned}
u(x,y) \sim & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_k+1}{4^{\tau_k}}\bigl(\phi(p_k)+\varepsilon_k\psi(p_k)\bigr) \\
& - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tau_k}{4^{\tau_k+1}}\bigl(\phi(q_k)+\delta_k\psi(q_k)\bigr)
\end{aligned}
$$

を得る。ここで、$k \neq j$ のときには、$\tau_k, p_k, q_k, \varepsilon_k, \delta_k$ と $\tau_j, p_j, q_j, \varepsilon_j, \delta_j$ を、われわれは独立に計算できることに注意する。この事実は、(3.15) の *stochastic numerical solution* が、優れた並列アルゴリズムを与えることを意味する。したがって、超並列コンピュータを用いれば、驚異的な *speed-up* が得られるものと期待される。さらに、(3.15) は、(1.1) を与えられた1点 (x,y) だけで解くことを可能にする、*i.e.*, もしも、問題を領域内の一部分だけで解けばよいのであれば、解を領域全体で計算する必要がないことになる。この事実は、更なる *speed-up* を保証する。

4. 画像処理的解釈

次にわれわれは、(3.1) に画像処理的な解釈を与える。2次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^2$ の部分集合 X を

$$
(4.1)\qquad X = \bigl\{(\xi,\eta) : \xi = x + h(i-j),\ \eta = y + h(i+j),\ i,j = 0,\pm1,\pm2,\cdots\bigr\}
$$

で定義する。直積集合 $X \times X$ 上で定義された関数列 $p(\xi,\eta,x,y;k), k = 0,1,2,\cdots,$ を、次の式で定義する：

$$
(4.2)\qquad p(\xi,\eta,x,y;0) = \begin{cases} 1 & \text{if } (\xi,\eta) = (x,y) \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}
$$

$$
(4.3)\qquad
\begin{aligned}
& p(\xi,\eta,x,y;k+1) \\
& = \frac{1}{4}\bigl\{p(\xi+h,\eta+h,x,y;k) + p(\xi-h,\eta+h,x,y;k) \\
& + p(\xi-h,\eta-h,x,y;k) + p(\xi+h,\eta-h,x,y;k)\bigr\}\ .
\end{aligned}
$$

(4.2), (4.3) と直接計算により、任意の $(\xi_{n+k},\eta_{n+k}) \in X$ と $n,k = 1,2,\cdots$ に対して、

$$
(4.4)\qquad
\begin{aligned}
& p(\xi_{n+k},\eta_{n+k},x,y;n+k) \\
& = \sum_{(\xi_n,\eta_n)\in X} p(\xi_{n+k},\eta_{x+k},\xi_n,\eta_n;k)\,p(\xi_n,\eta_n,x,y;n)
\end{aligned}
$$

が得られる。(4.4) は、一種の Chapman-Kolmogorov 方程式である。

われわれは、以下のことに注意する：

$$p(\xi,\eta,x,y;1)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & \text{if } (\xi,\eta)=(x\pm h,y\pm h),(x\pm h,y\mp h)\\ 0 & \text{otherwise ,}\end{cases} \tag{4.5}$$

$$p(\xi,\eta,x,y;2)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & \text{if } (\xi,\eta)=(x,y)\\ \dfrac{1}{8} & \text{if } (\xi,\eta)=(x\pm 2h,y),(x,y\mp 2h)\\ \dfrac{1}{16} & \text{if } (\xi,\eta)=(x\pm 2h,y\pm 2h),(x\pm 2h,y\mp 2h)\\ 0 & \text{otherwise .}\end{cases} \tag{4.6}$$

さらに、(2.1), (4.5) と (4.6) より、

$$\begin{aligned} &Mu(x,y)\\ &=\frac{1}{4}\big(u(x+h,y+h)+u(x-h,y+h)+u(x-h,y-h)+u(x+h,y-h)\big)\\ &=\sum_{(\xi_1,\eta_1)\in\overline{D}\cap X} u(\xi_1,\eta_1)\,p(\xi_1,\eta_1,x,y;1)\ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &M^2u(x,y)\\ &=\frac{1}{4}\big(Mu(x+h,y+h)+Mu(x-h,y+h)+Mu(x-h,y-h)+Mu(x+h,y-h)\big)\\ &=\frac{1}{16}\big(2u(x+2h,y)+u(x+2h,y+2h)+2u(x,y+2h)+u(x-2h,y+2h)\\ &\qquad 2u(x-2h,y)+u(x-2h,y-2h)+2u(x,y-2h)+u(x+2h,y-2h)+4u(x,y)\big)\\ &=\sum_{(\xi_2,\eta_2)\in\overline{D}\cap X} u(\xi_2,\eta_2)\,p(\xi_2,\eta_2,x,y;2)\ .\end{aligned}$$

さらに、数学的帰納法により、$\sqrt{2}hk\le dist\big((x,y),\partial D\big)$ なる $k=0,1,2,\cdots$ に対して、

$$M^k u(x,y)=\sum_{(\xi_k,\eta_k)\in\overline{D}\cap X} u(\xi_k,\eta_k)\,p(\xi_k,\eta_k,x,y;k) \tag{4.7}$$

が成り立つことがわかる。

(4.7) と (3.1) より、われわれは 補題 3.1 の deterministic version を得る。

補題 4.1. *$u(x,y)$ が (1.1) の解であれば、$\sqrt{2}h(n+1)\le dist\big((x,y),\partial D\big)$ なる、任意の $(x,y)\in D$ と $n=1,2,\cdots$ に対して、*

$$\begin{aligned} u(x,y)=&(n+1)\sum_{(\xi_n,\eta_n)\in\overline{D}\cap X} u(\xi_n,\eta_n)\,p(\xi_n,\eta_n,x,y;n)\\ &-n\sum_{(\xi_{n+1},\eta_{n+1})\in\overline{D}\cap X} u(\xi_{n+1},\eta_{n+1})\,p(\xi_{n+1},\eta_{n+1},x,y;n+1)+O(h^5)\sigma(n)\ .\end{aligned} \tag{4.8}$$

$p(\xi,\eta,x,y;k), k=0,1,2,\cdots,$ を少し変えて、関数列 $q(\xi,\eta,x,y;k)$ と $r(\xi,\eta,x,y;k)$ を以下のように構成する： $dist\big((x,y),\partial D\big) \geq 2\sqrt{2}h$ なる $(x,y)\in D$ に対して、

$$q(\xi,\eta,x,y;0)\equiv 0 \ , \tag{4.9}$$

$$r(\xi,\eta,x,y;0)=\begin{cases}1 & \text{if } (\xi,\eta)=(x,y)\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \tag{4.10}$$

かつ

$$q(\xi,\eta,x,y;k+1)=\begin{cases}\frac{1}{4}\big\{r(\xi+h,\eta+h,x,y;k)+r(\xi-h,\eta+h,x,y;k)\\ \qquad +r(\xi-h,\eta-h,x,y;k)+r(\xi+h,\eta-h,x,y;k)\big\}\\ \qquad\qquad \text{if } \sqrt{2}h\leq dist\big((\xi,\eta),\partial D\big)<2\sqrt{2}h\\ 0\\ \qquad\qquad \text{otherwise ,}\end{cases} \tag{4.11}$$

$$r(\xi,\eta,x,y;k+1)=\begin{cases}\frac{1}{4}\big\{r(\xi+h,\eta+h,x,y;k)+r(\xi-h,\eta+h,x,y;k)\\ \qquad +r(\xi-h,\eta-h,x,y;k)+r(\xi+h,\eta-h,x,y;k)\big\}\\ \qquad\qquad \text{if } dist\big((\xi,\eta),\partial D\big)\geq 2\sqrt{2}h\\ 0\\ \qquad\qquad \text{otherwise .}\end{cases} \tag{4.12}$$

(4.7) と (3.5) により、$\sqrt{2}h(n+1)\leq dist\big((x,y),\partial D\big)$ のとき、

$$u(x,y)=\sum_{(\xi_n,\eta_n)\in\overline{D}\cap X}\big((n+1)-nM\big)u(\xi_n,\eta_n)\,p(\xi_n,\eta_n,x,y;n)+O(h^5)\,\sigma(n)\ . \tag{4.13}$$

一方、$\sqrt{2}h(n+1)\leq dist\big((x,y),\partial D\big)$, のとき、

$$\begin{aligned}&p(\xi_n,\eta_n,x,y;n)\\ &=\begin{cases}q(\xi_n,\eta_n,x,y;n)\\ \qquad \text{if } \sqrt{2}h\leq dist\big((\xi_n,\eta_n),\partial D\big)<2\sqrt{2}h\\ r(\xi_n,\eta_n,x,y;n)\\ \qquad \text{if } dist\big((\xi_n,\eta_n),\partial D\big)\geq 2\sqrt{2}h\\ 0\\ \qquad \text{otherwise}\end{cases}\end{aligned} \tag{4.14}$$

なので、(4.9)-(4.12) より、

$$
(4.15) \qquad \begin{aligned} u(x,y) = &\sum_{(\xi_n,\eta_n)\in\overline{D}\cap X} \big((n+1)-nM\big)u(\xi_n,\eta_n)\,q(\xi_n,\eta_n,x,y;n) \\ &+ \sum_{(\xi_n,\eta_n)\in\overline{D}\cap X} \big((n+1)-nM\big)u(\xi_n,\eta_n)\,r(\xi_n,\eta_n,x,y;n) \\ &+ O(h^5)\,\sigma(n) \end{aligned}
$$

が従う。$dist\big((\xi_n,\eta_n),\partial D\big) \geq 2\sqrt{2}h$ であれば、補題 2.3 と (4.7) より、$\sqrt{2}h(k+1) \leq dist\big((\xi_n,\eta_n),\partial D\big)$ なる $k=1,2,\cdots$ に対して、

$$
(4.16) \qquad \begin{aligned} &\big((n+1)-nM\big)u(\xi_n,\eta_n) \\ &= M^k\big((n+k+1)-(n+k)M\big)u(\xi_n,\eta_n) \\ &\qquad\qquad + O(h^5)\,\sigma(n+1,n+k) \\ &= \sum_{(\xi_{n+k},\eta_{n+k})\in\overline{D}\cap X} \big((n+k+1)-(n+k)M\big)u(\xi_{n+k},\eta_{n+k})p(\xi_{n+k},\eta_{n+k},\xi_n,\eta_n;k) \\ &\qquad\qquad + O(h^5)\,\sigma(n+1,n+k) \\ &= \sum_{(\xi_{n+k},\eta_{n+k})\in\overline{D}\cap X} \big((n+k+1)-(n+k)M\big)u(\xi_{n+k},\eta_{n+k})q(\xi_{n+k},\eta_{n+k},\xi_n,\eta_n;k) \\ &+ \sum_{(\xi_{n+k},\eta_{n+k})\in\overline{D}\cap X} \big((n+k+1)-(n+k)M\big)u(\xi_{n+k},\eta_{n+k})r(\xi_{n+k},\eta_{n+k},\xi_n,\eta_n;k) \\ &\qquad\qquad + O(h^5)\,\sigma(n+1,n+k) \end{aligned}
$$

がなりたつ。われわれは、このような変形を $\big((\nu+1)-\nu M\big)u(\xi_\nu,\eta_\nu)$ に対して、再帰的に繰り返せる。結果として、(4.4) と (4.14) により、$n=1,2,\cdots$ に対して、

$$
(4.17) \qquad \begin{aligned} u(x,y) = &\sum_{(\xi,\eta)\in\overline{D}\cap X} \sum_{\nu=1}^{n} \big((\nu+1)-\nu M\big)u(\xi,\eta)q(\xi,\eta,x,y;\nu) \\ &+ \sum_{(\xi,\eta)\in\overline{D}\cap X} \big((n+1)-nM\big)u(\xi,\eta)r(\xi,\eta,x,y;n) \\ &+ O(h^5)\,\sigma(n) \end{aligned}
$$

が得られる。

(2.2), 補題 2.1 と その 注意 1 より、

$$
(4.18) \qquad \begin{aligned} &\big((n+1)-nM\big)u(\xi,\eta) \\ &= u(\xi,\eta) - h^2 n\, Lu(\xi,\eta) \\ &= O(1) + O(h^2)n \end{aligned}
$$

なので、(4.17) は次の 補題 4.2 を導出する。

補題 4.2. *(1.1)* をみたす任意の関数 $u(x,y)$ と任意の自然数 $n=1,2,\cdots$ に対して、

$$
\begin{aligned}
u(x,y) = &\sum_{(\xi,\eta)\in\overline{D}\cap X} \sum_{\nu=1}^{n} \big((\nu+1)-\nu M\big)u(\xi,\eta)q(\xi,\eta,x,y;\nu) \\
&+ \sum_{(\xi,\eta)\in\overline{D}\cap X} \big(O(1)+O(h^2)n\big)r(\xi,\eta,x,y;n) \\
&+ O(h^5)\,\sigma(n)
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

がなりたつ。

関数 $\mu(\xi,\eta)$ を

$$
\mu(\xi,\eta) = \phi\big(\wp(\xi,\eta)\big) + d(\xi,\eta)\psi\big(\wp(\xi,\eta)\big)
\tag{4.20}
$$

で定義する。このとき、(3.11) は、

$$
u(\xi,\eta) - \mu(\xi,\eta) = O\big(d^2(\xi,\eta)\big)
\tag{4.21}
$$

を意味する。$\sqrt{2}h \le dist\big((\xi,\eta),\partial D\big) < 2\sqrt{2}h$ でない限り、$q(\xi,\xi,x,y;\nu)=0$ なので、(4.21) により、

$$
\begin{aligned}
&\big((\nu+1)-\nu M\big)u(\xi,\eta)q(\xi,\eta,x,y;\nu) \\
&= \big((\nu+1)-\nu M\big)\mu(\xi,\eta)q(\xi,\eta,x,y;\nu) + O(h^2)\nu q(\xi,\eta,x,y;\xi)
\end{aligned}
$$

となる。

したがって、われわれは次の補題を得る。

補題 4.3. $u(x,y)$ が *(1.1)* の解であれば、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{(\xi,\eta)\in\overline{D}\cap X} \sum_{\nu=1}^{n} \big((\nu+1)-\nu M\big)u(\xi,\eta)q(\xi,\eta,x,y;\nu) \\
&= \sum_{(\xi,\eta)\in\overline{D}\cap X} \sum_{\nu=1}^{n} \big((\nu+1)-\nu M\big)\mu(\xi,\eta)q(\xi,\eta,x,y;\nu) \\
&+ \sum_{(\xi,\eta)\in\overline{D}\cap X} \sum_{\nu=1}^{n} O(h^2)\nu q(\xi,\eta,x,y;\nu)\ .
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

補題 4.2 と 4.3 は、重調和ディリクレ問題に対する *deterministic numerical solution* を与える。

定理 4.1. $u(x,y)$ が *(1,1)* の解であれば、

$$
\begin{aligned}
u(x,y) = & \sum_{(\xi,\eta)\in\overline{D}\cap X} \sum_{\nu=1}^{n} \big((\nu+1)-\nu M\big)\mu(\xi,\eta)q(\xi,\eta,x,y;\nu) \\
& \sum_{(\xi,\eta)\in\overline{D}\cap X} \sum_{\nu=1}^{n} +O(h^2)\nu q(\xi,\eta,x,y;\nu) \\
& + \sum_{(\xi,\eta)\in\overline{D}\cap X} \big(O(1)+O(h^2)n\big)r(\xi,\eta,x,y;n) \\
& + O(h^5)\,\sigma(n)
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

がなりたつ。

注意. (2.1) は

$$
\begin{aligned}
& \big((\nu+1)-\nu M\big)\mu(\xi,\eta) \\
& = (\nu+1)\mu(\xi,\eta) \\
& - \frac{\nu}{4}\big(\mu(\xi+h,\eta+h)+\mu(\xi-h,\eta+h)\mu(\xi-h,\eta-h)+\mu(\xi+h,\eta-h)\big)
\end{aligned}
$$

を与えるので、(4.20) より、われわれは $\big((\nu+1)-\nu M\big)\mu(\xi,\eta)$ を explicit に計算することができる。さらに、(4.9)-(4.12) は、$q(\xi,\eta,x,y,;\nu)$ と $r(\xi,\eta,x,y,;\nu)$ の計算が、画像処理における平均化のアルゴリズムに帰着されることを示している。

5. 数値実験

この節では、われわれは重調和ディリクレ問題

$$
\begin{cases}
\Delta^2 u = 0 & \text{in } D \\
u = \phi, \ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \psi & \text{on } \partial D
\end{cases}
\tag{5.1}
$$

を、以下のような具体的な場合に 定理 3.1, 4.1 を用いて解き、その結果を真の解と比べる：

$$
\begin{aligned}
& D = \left\{(x,y) \,:\, \sqrt{(x-0.5)^2+(y-0.5)^2} < 0.5\right\}, \\
& \phi(x,y) = 0.7 - 0.5^3\ , \quad \psi(x,y) = 0.5\ .
\end{aligned}
$$

容易に分かるように、真の解は

$$
u(x,y) = 0.7 - 0.5\big((x-0.5)^2+(y-0.5)^2\big) \tag{5.2}
$$

である。

定理 3.1 の (3.13) により、われわれは (5.1) を解くことが出来る。定理 3.1 は、(5.1) に対する モンテ・カルロ法を与える。われわれは、実際のプログラミングのために、(3.12) を若干改良する。その結果として、収束の速さを加速することができる。アルゴリズムのアウトラインは、以下のようなものである。

十分小さな実数 $\delta > 0$ をとり、$\varepsilon = 2\sqrt{2}\delta$ とおく。さらに、十分大きな定数 N と L をとる。計算を始める前に、われわれは 1 点 $(x,y) \in \big\{(\xi,\eta) : dist\big((\xi,\eta),\partial D\big) \geq \varepsilon\big\}$ を任意に固定し、5 つの変数 e_1, e_2, p_1, p_2 と ℓ を初期化する：

$$e_1 := 0,\ e_2 := 0,\ p_1 := 0,\ p_2 := 0\ , \ell := 0\ . \tag{5.3}$$

次に、

$$(\xi_0,\eta_0) = (x,y), \quad \begin{cases} P\big[(\xi_{k+1},\eta_{k+1}) = (\xi_k,\eta_k) + (\pm\delta,\pm\delta)\big] = \dfrac{1}{4} \\ P\big[(\xi_{k+1},\eta_{k+1}) = (\xi_k,\eta_k) + (\pm\delta,\mp\delta)\big] = \dfrac{1}{4} \end{cases} \tag{5.4}$$

なるランダム・ウォーク $(\xi_k,\eta_k),\ k = 0,1,2,\cdots,N$ を生成し、n を次式で定義する：$\big\{k \leq N : dist\big((\xi_k,\eta_k),\partial D\big) < \varepsilon,\ dist\big((\xi_{k+1},\eta_{k+1}),\partial D\big) < \varepsilon\big\} \neq \emptyset$ の場合、

$$n = min\Big\{k \leq N : dist\big((\xi_k,\eta_k),\partial D\big) < \varepsilon,\ dist\big((\xi_{k+1},\eta_{k+1}),\partial D\big) < \varepsilon\Big\}\ , \tag{5.5}$$

そして、それ以外の場合には、 $n = N$. (5.4) と (5.5) を用いて、

$$\begin{aligned} e_1 &:= e_1 + \frac{(n+1)\big\{\phi\big(\wp(\xi_n,\eta_n)\big) + d(\xi_n,\eta_n)\psi\big(\wp(\xi_n,\eta_n)\big)\big\}}{4^n}, \\ e_2 &:= e_2 + \frac{n\big\{\phi\big(\wp(\xi_{n+1},\eta_{n+1})\big) + d(\xi_{n+1},\eta_{n+1})\psi\big(\wp(\xi_{n+1},\eta_{n+1})\big)\big\}}{4^{n+1}}, \\ p_1 &:= p_1 + \frac{1}{4^n}, \\ p_2 &:= p_2 + \frac{1}{4^{n+1}}, \\ \ell &:= \ell + 1 \end{aligned} \tag{5.6}$$

とおく。ここで、$d(x,y)$ は点 (x,y) から、境界 ∂D までの距離をあらわし、$\wp(x,y)$ は ∂D 上の $dist\big((x,y),(\tilde{x},\tilde{y})\big) = d(x,y)$ なる点をあらわす。われわれは、$\ell < L$ という条件がみたされる限り、(5.4)-(5.6) の手順を繰り返せばよい。結果として、

$$u(x,y) \sim \frac{e_1}{p_1} - \frac{e_2}{p_2} \tag{5.7}$$

を得る。

定理 4.1 の (4.24) により、われわれは (5.1) を解くことが出来る。定理 4.1 は、*averaging method* (*i.e.*, difference method) を導出する。(4.29) を実際のプログラムに書き直すときに、

われわれはそれを若干改良して、収束のスピードを加速すると同時に、エラーを最小限に食い止める。われわれのアルゴリズムのアウトラインは、次のようなものになる。

先の議論と同様に、十分大きな定数 N と L をとり、 $\varepsilon = 2\sqrt{2}/N$ とおく。簡単のために、 $x_i = i/N$ かつ $y_j = j/N$ と表すことにする。配列変数 p_{ij}, q_{ij}, $i, j = 0, 1, \cdots, N$ と 変数 ℓ を考える。初めに、われわれは任意に 1 点 $(x, y) \in \{(\xi, \eta) : dist((\xi, \eta), \partial D) \geq \varepsilon\}$ を固定し、配列変数 p_{ij}, q_{ij} と ループカウンタ ℓ を初期化する：

$$
\begin{aligned}
p_{ij} &:= \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j) = (\gamma(x), \gamma(y)) \\ 0 & \text{otherwise ,} \end{cases} \\
q_{ij} &:= 0 \quad \text{for every } i, j \ , \\
\ell &:= 0 \ .
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

ここで、 $\alpha \in \mathbf{R}$ に対して、

$$
\gamma(\alpha) = \begin{cases} \left[N\alpha\right] & \text{if } N\alpha - \left[N\alpha\right] < \dfrac{1}{2} \\ \left[N\alpha\right] + 1 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{5.9}
$$

とする。ただし、 $[\beta]$ は β 以下の最大整数を表す。われわれは、変数 p_{ij}, q_{ij}, ℓ を以下のように変えてゆく：はじめに、 $dist((x_i, y_j), \partial D) \geq \epsilon$ かつ $(i-\gamma(x)) \equiv (j-\gamma(y)) \equiv \ell \ (mod\, 2)$ の場合には、

$$
\begin{aligned}
q_{ij} &:= q_{ij} - \frac{p_{ij}}{4} \ , \\
q_{i+1\,j+1} &:= q_{i+1\,j+1} + \frac{p_{ij}}{2} \ , \\
q_{i-1\,j+1} &:= q_{i-1\,j+1} + \frac{p_{ij}}{2} \ , \\
q_{i-1\,j-1} &:= q_{i-1\,j-1} + \frac{p_{ij}}{2} \ , \\
q_{i+1\,j-1} &:= q_{i+1\,j-1} + \frac{p_{ij}}{2} \ , \\
q_{i+2\,j} &:= q_{i+2\,j} - \frac{p_{ij}}{8} \ , \\
q_{i\,j+2} &:= q_{i\,j+2} - \frac{p_{ij}}{8} \ , \\
q_{i-2\,j} &:= q_{i-2\,j} - \frac{p_{ij}}{8} \ , \\
q_{i\,j-2} &:= q_{i\,j-2} - \frac{p_{ij}}{8} \ , \\
q_{i+2\,j+2} &:= q_{i+2\,j+2} - \frac{p_{ij}}{16} \ , \\
q_{i-2\,j+2} &:= q_{i-2\,j+2} - \frac{p_{ij}}{16} \ , \\
q_{i-2\,j-2} &:= q_{i-2\,j-2} - \frac{p_{ij}}{16} \ , \\
q_{i+2\,j-2} &:= q_{i+2\,j-2} - \frac{p_{ij}}{16}
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

とおき、それ以外の場合には、

$$q_{ij} := q_{ij} + p_{ij} \tag{5.11}$$

とおく。つぎに、 q_{ij} を p_{ij} にコーピーし、 q_{ij} を初期化して、ℓ を 1 だけ増加させる, *i.e.*, すべての i, j に対して、

$$\begin{aligned} p_{ij} &:= q_{ij} \ , \\ q_{ij} &:= 0 \ , \\ \ell &:= \ell + 1 \end{aligned} \tag{5.12}$$

とする。われわれは、(5.10)-(5.12) の手順を、 $\ell < L$ である限り続ける。結果として、数値解

$$u(x,y) \sim \sum_{dist((x_i,y_j),\partial D)<\varepsilon} \Big\{\phi\big(\wp(x_i,y_j)\big) + d(x_i,y_j)\psi\big(\wp(x_i,y_j)\big)\Big\} p_{ij} \tag{5.13}$$

が得られる。

参考文献

[1] K. Amano, Portable floating-point processor with arbitrarily high precision and its performance, *Josai Jôhô-Kagaku-Kenkyu*, **4** (1993), pp. 15-24.

[2] K. Amano, Numeric-symbolic hybrid method for stochastic differential equation (to appear).

[3] G. Dahlquist and Å. Björck, Numerical Methods, *Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J.*, 1974.

[4] K. Gopalsamy and B. D. Aggarwala, On a Monte Carlo method for biharmonic boundary value problems, *ZAMM*, **53**(1973), pp. 293-298.

[5] K. Itô and H. P. McKean Jr., Diffusion Processes and Their Sample Paths, *Springer-Verlag, Berlin*, 1965.

[6] D. E. Knuth, The Art of Computer Programming — Seminumerical Algorithms, vol.2, 2nd ed., *Addison-Wesley, Reading, Massachusetts*, 1981.

[7] P. L'Ecuyer, Efficient and portable combined random number generators, *Commun. ACM*, **31**(1988), pp. 742-749,774.

[8] O. Miyatake and K. Wakimoto, Random Number and Monte Carlo Method, *Morikita Publisher*, 1978 (in Japanese).

[9] S. Mizohata, The Theory of Partial Differential Equations, *Cambridge University Press*, 1973.

[10] Y. Morimoto, Image Processing, *Baihûkan*, 1984 (in Japanese).

[11] D. J. Ortega and R. G. Voigt, Solution of partial differential equations on vector and parallel computers, *SIAM Review*, **27**(1985), pp. 149-240.

[12] B. E. Pobedrya and P. V. Chistyakov, Solution of three-dimensional problems of the theory of elasticity using the Monte Carlo method, *PMM U.S.S.R.*, **52**(1988), pp. 270-274.

[13] S. K. Park and K. W. Miller, Random number generators: good ones are hard to find, *Commun. ACM*, **31**(1988), pp. 1192-1201.

[14] A. Rosenfeld and A. C. Kak, Digital Picture Processing, vol. 1, 2, *Academic Press*, 1982.

[15] T. Saitoh, Monte Carlo method for biharmonic boundary value problem and its application, *Thesis of Univ. Electro-Communications*, 1992 (in Japanese).

[16] F. Spitzer, Principles of Random Walk, *Springer-Verlag*, 1964.